Über Fortsetzungs- und Approximationsprobleme für stetige Abbildungen von metrischen Räumen[1])

Von L. GEHÉR in Szeged

Nach dem klassischen Satz von TIETZE [1] besitzt jede, auf einer abgeschlossenen Untermenge D eines metrischen Raumes E definierte reelle stetige Funktion eine reelle stetige Fortsetzung auf den ganzen Raum E.

Es erhebt sich die Frage, ob dieser Satz auch für nicht-reellwertige Funktionen, etwa für solche Funktionen, deren Wertebereich in einen beliebigen anderen metrischen Raum fällt, die also eine Abbildung eines metrischen Raumes auf einen anderen metrischen Raum bewirken, gültig ist?

Ein Resultat in dieser Richtung befindet sich in einer Arbeit von ARONSZAJN und PANITCHPAKDI [2]. Es handelt sich dort allerdings nur um die Fortsetzung *gleichmäßig stetiger* Abbildungen. Um das Resultat von [2] formulieren zu können, müssen wir zuerst einige Begriffe einführen.

Definition 1. *Es sei T eine Abbildung des metrischen Raumes A in den metrischen Raum M. Wir sagen, eine nichtnegative, reelle und monoton nichtabnehmende Funktion $\delta(\varepsilon)$ $(0<\varepsilon<\infty)$[2]) mit $\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0$ sei eine Stetigkeitsmajorante*[3]) *von T, wenn aus*

$$\varrho(x,y)\leqq\varepsilon \qquad (x,y\in A)$$

immer

$$\varrho'(T(x),T(y))\leqq\delta(\varepsilon)$$

folgt, wobei ϱ und ϱ' den Abstand in der Metrik von A bzw. M bedeuten.

Besitzt eine Abbildung eine Stetigkeitsmajorante, so hat sie offenbar unendlich viele, und ist die Abbildung gleichmäßig stetig.

---

[1]) Diese Arbeit enthält die wesentlichen Teile der in April 1958 an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Szeged eingereichten Doktorarbeit des Verfassers.

[2]) Der Wert von $\delta(\varepsilon)$ darf auch gleich $+\infty$ sein.

[3]) Diese Benennung stammt von Herrn Professor BÉLA SZ.-NAGY. Ihm bin ich für wertvolle Diskussionen während der Fertigstellung dieser Arbeit dankbar.

Jede gleichmäßig stetige Abbildung T besitzt eine *kleinste* Stetigkeitsmajorante, den sogenannten *Stetigkeitsmodul* $\delta_T(\varepsilon)$, den man folgenderweise definieren kann:

$$\delta_T(\varepsilon) = \sup \{\varrho'(T(x), T(y)) : x, y \in A;\ \varrho(x, y) \leqq \varepsilon\}.$$

In folgendem verstehen wir unter einer *Kugel* immer eine abgeschlossene Kugel; in Zeichen $G(x; r)$ (x ist der Mittelpunkt, r der Radius). Das Innere einer Kugel $G(x; r)$ nennen wir eine *offene Kugel* und bezeichnen wir sie mit $G^\circ(x; r)$.

Definition 2. *Wir nennen einen metrischen Raum M hyperkonvex, falls die folgende Bedingung erfüllt ist: Für jedes System $\mathfrak{S} = \{G(x_i; r_i)\}_{i \in I}$ von Kugeln in M (I ist eine beliebige Indexmenge) mit der Eigenschaft*

$$\varrho'(x_i, x_k) \leqq r_i + r_k \qquad (i, k \in I)$$

ist $\bigcap_{i \in I} G(x_i; r_i)$ nicht leer.

Diese Definition ist äquivalent mit der folgenden

Definition 2. *Ein metrischer Raum M is hyperkonvex, wenn er konvex ist*[4]) *und für jedes System $\mathfrak{S} = \{G(x_i; r_i)\}_{i \in I}$ von Kugeln in M mit paarweise nichtleerem Durchschnitt auch $\bigcap_{i \in I} G(x_i; r_i)$ nicht leer ist (sog. Eigenschaft der „binären Intersektion" für Kugeln).*

Jeder lineare metrische Raum ist konvex, folglich ist dann und nur dann hyperkonvex, wenn seine Kugeln die Eigenschaft der binären Intersektion besitzen.

L. NACHBIN [3] hat bewiesen, daß ein endlichdimensionaler (reeller), linearer normierter Raum B dann und nur dann hyperkonvex ist, wenn man eine Basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ in B derart finden kann, daß für die Norm jedes Elementes

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \in B$$

gilt:

$$\|x\| = \max \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

Ein endlichdimensionaler linearer Raum mit euklidischer Metrik ist also dann und nur dann hyperkonvex, wenn er eindimensional ist.

Mit der Hilfe dieser Begriffe können wir den Satz von ARONSZAJN und PANITCHPAKDI [2] folgenderweise formulieren:

Es sei D eine Untermenge eines metrischen Raumes E und M sei ein hyperkonvexer metrischer Raum. Jede Abbildung T von D in M, die eine

---

4) Wir nennen einen metrischen Raum M konvex, wenn man zu jedem Punktepaar x, y von M und zu jedem Paar α, β von positiven Zahlen mit $\alpha + \beta = \varrho(x, y)$, einen Punkt $z \in M$ mit $\varrho(x, z) = \alpha$ und $\varrho(y, z) = \beta$ finden kann.

subadditive Stetigkeitsmajorante[5]) $\delta(\varepsilon)$ *besitzt, kann zu einer Abbildung* T_E *von* E *in* M *fortgesetzt werden, und zwar mit derselben Stetigkeitsmajorante* $\delta(\varepsilon)$.[6])

Ist M *nicht hyperkonvex, so kann man einen Raum* E, *eine Untermenge* D *von* E *und eine Abbildung* T *von* D *in* M *mit einer subadditiven Stetigkeitsmajorante* $\delta(\varepsilon)$ *finden, für die der Satz ungültig ist.*

In einem speziellen Fall besagt dieser Satz Folgendes:

Erfüllt T auf der Menge D eine gleichmäßige Lipschitz-Bedingung mit der Konstante K, so besitzt T eine Fortsetzung auf E, die ebenfalls die Lipschitz-Bedingung, und zwar mit derselben Konstante K genügt[7]). (In diesem Fall ist nämlich die Funktion $\delta(\varepsilon) = K\varepsilon$ eine subadditive Stetigkeitsmajorante von T.)

In folgendem werden wir diese Resultaten in mehren Richtungen verallgemeinern.

Statt der Existenz einer *subadditiven Stetigkeitsmajorante* bzw. einer *gleichmäßigen Lipschitz-Bedingung* werden wir die *Stetigkeit in jedem Punkte* bzw. die Erfüllung einer *lokalen Lipschitz-Bedingung* annehmen. Dagegen setzen wir voraus, daß die Untermenge D abgeschlossen[8]), und der Raum M (bzw. der Wertebereich von T) hyperkonvex und beschränkt ist.

---

[5]) Aronszajn und Panitchpakdi [2] haben bewiesen, daß eine gleichmäßig stetige Abbildung T dann und nur dann eine *subadditive* Stetigkeitsmajorante besitzt, wenn ihr Stetigkeitsmodul $\delta_T(\varepsilon)$ die Bedingung $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to\infty}} \dfrac{\delta_T(\varepsilon)}{\varepsilon} \neq \infty$ erfüllt.

[6]) Ist T_2 eine Fortsetzung von T_1, so werden wir dies kurz durch das Zeichen $T_2 \succ T_1$ andeuten.

[7]) Wir sagen, daß die Abbildung T des metrischen Raumes A in den metrischen Raum M in einem Punkt $x_0 \in A$ eine *Lipschitz-Bedingung* erfüllt, wenn es eine Konstante $k(x_0)$ derart gibt, daß $\varrho'(T(x_0), T(y)) \leqq k(x_0)\,\varrho(x_0, y)$ für jedes $y \in A$ gültig ist. Gilt diese Ungleichung nur für die Punkte y einer gewissen Umgebung vom Radius $\vartheta(x_0)$ des Punktes x_0, so sagen wir, daß T im Punkt x_0 eine *lokale Lipschitz-Bedingung* erfüllt. Existiert eine Konstante K derart, daß $\varrho'(T(x), T(y)) \leqq K\varrho(x, y)$ für jedes Punktepaar $x, y \in A$ gilt, so sagen wir, T erfülle eine *gleichmäßige Lipschitz-Bedingung* mit der Konstante K.

Wir bezeichnen die Klasse der Abbildungen T von A in M, die in jedem Punkte $x \in A$ eine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllen, mit $\mathrm{Lip}_l[A, M]$. Die Klasse der Abbildungen, die in jedem Punkt $x \in A$ eine (nicht lokale) Lipschitz-Bedingung erfüllen, sei mit $\mathrm{Lip}[A, M]$, und die Klasse der Abbildungen, die in A eine gleichmäßige Lipschitz-Bedingung erfüllen, mit $\mathrm{Lip}_u[A, M]$ bezeichnet.

Wenn wir auch die gleichmäßige Lipschitz-Konstante K bzw. die mit dem Punkte x veränderliche Lipschitz-Konstante $k(x)$ angeben, dann schreiben wir $\mathrm{Lip}_u[A, M; K]$ bzw. $\mathrm{Lip}[A, M; k]$.

[8]) Für eine gleichmäßig stetige Abbildung T ist die Voraussetzung, daß D abgeschlossen ist, unwesentlich. Ist nämlich T auf einer Menge D gleichmäßig stetig, so hat sie eine gleichmäßig stetige Fortsetzung auf die abgeschlossene Hülle von D.

Wir werden die Frage der Fortsetzung der stetigen Abbildungen auf die Frage der Fortsetzung der eine Lipschitz-Bedingung erfüllenden Abbildungen zurückführen, indem wir die stetigen Abbildungen durch Lipschitzsche Abbildungen gleichmäßig approximieren.

In § 1 werden wir uns mit der Fortsetzung solcher Abbildungen beschäftigen, die eine *lokale* Lipschitz-Bedingung erfüllen. Im Fall eines *beschränkten* Wertebereichs folgt die nichtlokale Lipschitz-Bedingung aus der lokalen[9]), folglich werden wir in diesem Fall das Wort „lokal" immer weglassen.

In § 2 werden wir die gleichmäßige Approximation *stetiger* Abbildungen durch *Lipschitzsche* Abbildungen untersuchen.

In § 3 werden wir die Sätze der Fortsetzbarkeit der *stetigen* Abbildungen als ein Korollar der Ergebnisse der §§ 1—2 gewinnen.

Die Ergebnisse der §§ 1—3 erweitern wir auch für beliebige endlichdimensionale lineare normierte Räume.

In § 4 werden wir den Begriff des hyperkonvexen metrischen Raumes etwas verallgemeinern, und die Sätze allgemeiner formulieren.

Wir bemerken noch, daß die Fortsetzungssätze nicht für beliebige metrische Räume M gültig bleiben. Genauer können wir Folgendes behaupten:

Es sei M ein gegebener metrischer Raum. Wenn bei jeder Wahl des metrischen Raumes E und der in E *abgeschlossenen* Menge D, jede *stetige* Abbildung von D in M sich zu einer stetigen Abbildung von E in M fortsetzen läßt, dann ist M notwendigerweise ein *absolutes Retraktum in weiterem Sinne* (vgl. [2]).

§ 1. Fortsetzungen von Lipschitzschen Abbildungen

Satz 1. *Es sei E ein beliebiger metrischer Raum, D eine abgeschlossene Untermenge von E, und M ein beschränkter und hyperkonvexer metrischer Raum*[10]) *mit dem Durchmesser d. Sei $T \in \mathrm{Lip}\,[D, M; k]$, $T^* \in \mathrm{Lip}[D, M; k^*]$, und*

---

[9]) Es folgt aus $\varrho'(T(x_0), T(y)) \leqq k(x_0)\,\varrho(x_0, y)$ für $\varrho(x_0, y) \leqq \vartheta(x_0)$ auch die Ungleichung

$$\varrho'(T(x_0), T(y)) \leqq \max\left[k(x_0), \frac{d}{\vartheta(x_0)}\right]\varrho(x_0, y) \quad \text{für} \quad y \in A,$$

wobei d den Durchmesser des Wertebereichs und A den Definitionsbereich von T bedeutet.

[10]) Statt der Beschränktheit von M genügt es vorauszusetzen, daß der Wertebereich von T beschränkt ist, Dies folgt daraus, daß jede Kugel G in einem hyperkonvexen metrischen Raum ebenfalls hyperkonvex ist, Jede Kugel in G ist nämlich der Durchschnitt von

es gelte die Ungleichung $\varrho'(T(x), T^*(x)) \leqq \varepsilon$ in jedem Punkte $x \in D$. Existiert eine Fortsetzung $T_E^* \in \mathrm{Lip}\,[E, M; k_E^*]$ von T^*, so existiert auch eine Fortsetzung $T_E \in \mathrm{Lip}\,[E, M; k_E]$ von T mit

$$k_E(x) = \begin{cases} \max\,[k(x), k_E^*(x)] & (x \in D) \\ 1 + \max\left[\dfrac{d}{\varrho(x, D)}, k_E^*(x)\right] & (x \in E - D), \end{cases}$$

und zwar derart, daß in jedem Punkt $x \in E$ die Ungleichung $\varrho'(T_E(x), T_E^*(x)) \leqq \varepsilon$ erfüllt ist.

Beweis. Wir zerlegen die Menge $E - D$ in abzählbar unendlich viele Teile E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ folgendermaßen: E_n soll die Menge aller Punkte von $E - D$ bezeichnen, die die Ungleichung

$$n - 1 < \max\left[\frac{d}{\varrho(x, D)}, k_E^*(x)\right] \leqq n$$

erfüllen. Die Mengen $D, E_1, E_2, \ldots$ sind offenbar paarweise fremd, und man hat $D \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = E$.

Wir führen in die Mengen $E_1, E_2, \ldots$ je eine Wohlordnung ein; die entsprechenden Ordnungstypen seien der Reihe nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Diese Wohlordnungen erzeugen eine Wohlordnung der Menge $E - D$, wenn wir alle Elemente von E_{n+1} nach den Elementen von E_n setzen $(n = 1, 2, \ldots)$. Der Ordnungstyp dieser Wohlordnung ist also $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots$; $E - D = \{x_\nu\}_{\nu < \alpha}$.

Für eine beliebige Ordnungszahl η setzen wir $D_\eta = D \cup \{x_\nu\}_{\nu < \eta}$. Wir werden die gewünschte Fortsetzung der Abbildung durch transfinite Rekursion definieren, indem wir ihr Definitionsbereich schrittweise ausdehnen. Die Abbildung T mit dem ursprünglichen Definitionsbereich $D = D_1$ soll auch mit T_1 bezeichnet werden.

Es sei η eine beliebige Ordnungszahl $(\eta \leqq \alpha)$ und wir nehmen an, es sei schon je eine Fortsetzung T_ξ von T auf jede Menge D_ξ mit $\xi < \eta$ definiert, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $$\varrho'(T_\xi(x), T_\xi(y)) \leqq \bar{k}(x)\,\varrho(x, y) \qquad (x, y \in D_\xi)$$

G und einer Kugel in M, also können wir jedes System von Kugeln in G in der Form $\{G_i \cap G\}_{i \in I}$ darstellen. Sind die Mittelpunkte je zweier dieser Kungeln nicht ferner voneinander als die Summe ihrer Radien, so hat diese Eigenschaft auch das System der Kugeln G und $G_i\,(i \in I)$, und die Behauptung folgt dann auf Grund der Beziehung

$$\bigcap_{i \in I} (G_i \cap G) = \left(\bigcap_{i \in I} G_i\right) \cap G.$$

mit

$$\bar{k}(x)=\begin{cases}\max[k(x), k_E^*(x)] & \text{für} \quad x \in D, \\ n \quad \text{für} \quad x \in E_n & (n=1,2,\ldots),\end{cases}$$

(ii) $$\varrho'(T_\xi(x), T_E^*(x)) \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad x \varepsilon D_\xi,$$

und

(iii) $$T_\xi \succ T_{\xi'} \quad \text{für} \quad \xi' < \xi < \eta.$$

Wir werden beweisen, daß T dann eine Fortsetzung T_η auf D_η besitzt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(I) $$\varrho'(T_\eta(x), T_\eta(y)) \leqq \bar{k}(x)\varrho(x,y) \quad \text{für} \quad x, y \in D_\eta,$$

(II) $$\varrho'(T_\eta(x), T_E^*(x)) \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad x \in D_\eta,$$

(III) $$T_\eta \succ T_\xi \quad \text{für} \quad \xi < \eta.$$

Man hat zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem η eine Limeszahl ist oder nicht.

Fall 1: η ist eine Limeszahl. Dann ist offenbar $\bigcup_{\xi<\eta} D_\xi = D_\eta$ und man definiere T_η durch

$$T_\eta(x) = T_\xi(x) \quad \text{für} \quad x \in D_\xi \quad (\xi < \eta);$$

wegen (iii) ist die Definition von T_η eindeutig und die Relation $T_\eta \succ T_\xi \succ T$ gilt für jede Ordnungszahl $\xi < \eta$. T_η erfüllt auch die Bedingungen (I) und (II). In der Tat, sind x und y zwei beliebig gewählte Punkte von D_η, so existiert eine Ordnungszahl $\xi < \eta$ derart, daß x und y beide in D_ξ enthalten sind; wegen (i), (ii) gelten also die Relationen:

$$\varrho'(T_\eta(x), T_\eta(y)) = \varrho'(T_\xi(x), T_\xi(y)) \leqq \bar{k}(x)\varrho(x,y),$$

$$\varrho'(T_\eta(x), T_E^*(x)) = \varrho'(T_\xi(x), T_E^*(x)) \leqq \varepsilon.$$

Fall 2: η ist keine Limeszahl, sondern z. B. $\eta = \xi + 1$. Dann ist $D_\eta = D_{\xi+1} = D_\xi \cup \{x_\xi\}$. Der Punkt x_ξ möge zur Menge E_{n_0} gehören. Für das System der Kugeln $G(T_\xi(x), k(x)\varrho(x, x_\xi))$ mit $(x \in D_\xi)$ und $G(T_E^*(x_\xi), \varepsilon)$ gelten die Ungleichungen:

$$\begin{aligned}\bar{k}(y)\varrho(y, x_\xi) + \bar{k}(z)\varrho(z, x_\xi) &\geqq \\ &\geqq \min[\bar{k}(y), \bar{k}(z)](\varrho(y, x_\xi) + \varrho(z, x_\xi)) \geqq \\ &\geqq \min[\bar{k}(y), \bar{k}(z)]\varrho(y,z) \geqq \varrho'(T_\xi(y), T_\xi(z))\end{aligned}$$

für $y, z \in D_\xi$, und

$$\begin{aligned}\bar{k}(x)\varrho(x, x_\xi) + \varepsilon \geqq \varrho'(T_E^*(x), T_E^*(x_\xi)) + \varrho'(T_E^*(x), T_\xi(x)) &\geqq \\ \geqq \varrho'(T_E^*(x_\xi), T_\xi(x))&\end{aligned}$$

für $x \in D_\xi$. Wegen der Hyperkonvexität von M haben diese Kugeln mindestens einen gemeinsamen Punkt. Wir wählen einen solchen gemeinsamen

Punkt t_ξ und mit seiner Hilfe definieren wir eine Fortsetzung T_η von T_ξ (und damit auch von T) auf D_η folgendermaßen:

$$T_\eta(x) = T_{\xi+1}(x) = \begin{cases} T_\xi(x) & \text{für} \quad x \in D_\xi \\ t_\xi & \text{für} \quad x = x_\xi. \end{cases}$$

T_η erfüllt die Bedingungen (I) und (II). Aus der Konstruktion folgen für $x \in D_\xi$ die Ungleichungen

$$\varrho'(T_\eta(x), T_\eta(x_\xi)) \leqq \bar{k}(x)\,\varrho(x, x_\xi),$$
$$\varrho'(T_\eta(x), T_E^*(x)) \leqq \varepsilon,$$

also sind die Bedingungen (I) und (II) für die Punkte $x \in D_\xi$ erfüllt. Wir müssen sie noch auch für den Punkt $x = x_\xi$ rechtfertigen. Daß (II) auch für $x = x_\xi$ erfüllt ist, folgt wieder aus der Konstruktion. Um auch die Erfüllung von (I) zu beweisen, nehmen wir einen beliebigen Punkt $y \in D_\eta$. Fällt dieser in D, so gilt

$$\frac{\varrho'(T_\eta(y), T_\eta(x_\xi))}{\varrho(y, x_\xi)} \leqq \frac{d}{\varrho(x_\xi, D)} \leqq \max\left[\frac{d}{\varrho(x_\xi, D)}, k_E^*(x_\xi)\right] \leqq$$
$$\leqq n_0 = \bar{k}(x_\xi).$$

Fällt aber y in $(E-D) \cap D_\eta$, so gehört er notwendigerweise zu einer Menge E_m mit $m \leqq n_0$. Dann folgt aus $\bar{k}(y) = m$, daß

$$\varrho'(T_\eta(y), T_\eta(x_\xi)) \leqq \bar{k}(y)\,\varrho(y, x_\xi) \leqq n_0\,\varrho(y, x_\xi) = \bar{k}(x_\xi)\,\varrho(y, x_\xi)$$

gilt, w. z. b. w.

So haben wir eine Fortsetzung T_E von T mit transfiniter Rekursion definiert, $T_E \in \mathrm{Lip}\,[E, M; \bar{k}] \subset \mathrm{Lip}\,[E, M; k_E]$ (weil $\bar{k}(x) \leqq k_E(x)$ ist). Damit ist der Satz 1 bewiesen.[11])

K o r o l l a r. *E, D, M seien wie in Satz 1. Jede Abbildung* $T \in \mathrm{Lip}[D, M; k]$ *besitzt eine Fortsetzung* $T_E \in \mathrm{Lip}\,[E, M; k_E]$ *mit*

$$k_E(x) = \begin{cases} k(x) & \text{für} \quad x \in D, \\ 1 + \dfrac{d}{\varrho(x, D)} & \text{für} \quad x \in E - D. \end{cases}$$

[11]) Ein ähnlicher Satz gilt für Abbildungen, die eine gleichmäßige Lipschitz-Bedingung erfüllen:

E, D und M seien wie in Satz 1, nur soll M nicht notwendig beschränkt und D nicht notwendig abgeschlossen sein. Es seien $T \in \mathrm{Lip}_u\,[D, M; K]$ *und* $T^* \in \mathrm{Lip}_u[D, M; K^*]$ *und es gelte für jeden Punkt $x \in D$ die Ungleichung* $\varrho'(T(x), T^*(x)) \leqq \varepsilon$. *Bekanntlich* (vgl. [2]) *existiert eine Fortsetzung* $T_E^* \in \mathrm{Lip}_u\,[E, M; K^*]$ *von* T^*. *Dann existiert auch eine Fortsetzung* $T_E \in \mathrm{Lip}_u\,[E, M;\ \max(K, K^*)]$ *von T, die für jeden Punkt $x \in E$ die Ungleichung* $\varrho'(T_E(x), T_E^*(x)) \leqq \varepsilon$ *erfüllt.*

Der Beweis dieses Satzes ist ähnlich zum Beweis in [2] S. 415.

Zum Beweis wendet man Satz 1 mit $T^*(x) = a = \text{const.}$ $(x \in D)$ und $T_E^*(x) = a$ $(x \in E)$ an[12]).

Satz 1 gilt insbesondere für reellwertige Funktionen, hier braucht man sogar die Bedingung der Beschränktheit des Wertebereiches entbehren (vgl. [4]). Weiterhin bleibt der Satz auch im Fall richtig, daß die Bildmenge in einen beliebigen linearen normierten Raum fällt und nicht notwendig beschränkt ist, wenn wir voraussetzen, daß die Abbildung in jedem Punkt eine *lokale* Lipschitz-Bedingung erfüllt. Es gilt nämlich der folgende

Satz 1'. *E und D seien wie in Satz 1 und B sei ein endlichdimensionaler linearer normierter Raum. Ist* $T \in \mathrm{Lip}_u[D, B]$ *bzw.* $T \in \mathrm{Lip}_l[D, B]$, *so existiert eine Fortsetzung* T_E *von T, die zur Klasse* $\mathrm{Lip}_u[E, B]$ *bzw.* $\mathrm{Lip}_l[E, B]$ *gehört.*

Beweis. Es mögen die Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$ eine Basis in B bilden. Bekanntlich gibt es dann zwei Zahlen $\mu > 0$ und $m > 0$ derart, daß für jedes Element

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \in B$$

die Ungleichung

$$\text{(IV)} \qquad \mu \|x\| \leqq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n| \leqq m \|x\|$$

gilt (vgl. [5] S. 216).

T läßt sich (eindeutig) in der Form $T(x) = T_1(x) e_1 + T_2(x) e_2 + \cdots + T_n(x) e_n$ schreiben, wobei die $T_i(x)$ reellwertige Funktionen sind. T gehört offenbar dann und nur dann zur Klasse $\mathrm{Lip}_u[D, B]$ bzw. $\mathrm{Lip}_l[D, B]$, wenn jede Funktion T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ zur Klasse $\mathrm{Lip}_u[D, R]$ bzw. $\mathrm{Lip}_l[D, R]$ gehört, wo R die reelle Zahlengerade bedeutet. (Dies folgt aus (IV.)) Haben wir also die „Koordinaten" T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ auf E fortgesetzt, so folgt aus (IV), daß die Fortsetzungen von T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ auch eine Fortsetzung von der gegebener Art von T bestimmen.

§ 2. Approximation von stetigen Abbildungen durch Lipschitzsche Abbildungen

In folgendem spielt die gleichmäßige Approximation der stetigen Abbildungen durch Lipschitzsche Abbildungen eine wichtige Rolle. Jede auf einem kompakten metrischen Raum definierte reelle stetige Funktion $f(x)$ läßt sich

12) Ist der Wertebereich der Abbildungen in einer beschränkter Untermenge, etwa in einer Kugel um den Punkt O eines hyperkonvexen linearen normierten Raumes enthalten (diese Kugel ist ja wieder hyperkonvex; vgl. Fußnote10)), so folgt der Satz 1 aus dem Korollar. Man hat ja $\|T(x) - T^*(x)\| \leqq \varepsilon$ für $x \in D$. Also bekommt man den Satz 1, wenn man das Korollar auf die Abbildung $T - T^*$ und auf $M = G(O, \varepsilon)$ anwendet

durch Funktionen gleichmäßig approximieren, die je eine gleichmäßige Lipschitz-Bedingung erfüllen. Dies folgt einfach aus dem STONE—WEIERSTRASSschen Approximationssatz [6].

Im allgemeinen Fall, wo es sich über eine stetige Abbildung T eines beliebigen (nicht notwendig kompakten) metrischen Raumes A in einen beschränkten hyperkonvexen metrischen Raum M handelt, gelten ähnliche Approximationssätze, die wir jetzt beweisen werden. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem T gleichmäßig stetig oder nicht gleichmäßig stetig ist.

Satz 2. *Ist T gleichmäßig stetig auf A, so läßt sich sie beliebig genau durch zur Klasse* $\mathrm{Lip}_u\,[A, M]$ *gehörige Abbildungen gleichmäßig approximieren.*

Satz 3. *Ist T stetig auf A, so läßt sich sie beliebig genau durch zur Klasse* $\mathrm{Lip}\,[A, M]$ *gehörige Abbildungen gleichmäßig approximieren.*

Zum Beweis wird das folgende Lemma benützt:

Lemma. *Sei $m(r)$ eine Funktion, definiert auf einer Menge Δ von positiven reellen Zahlen, die 0 als Häufungspunkt hat. Die Werte von $m(r)$ seien nichtnegative reelle Zahlen (es ist auch der Wert $+\infty$ gestattet), ferner seien die folgenden Bedingungen erfüllt;* a) *für jedes $s>0$ ist $\sup\limits_{r\geqq s} m(r)<\infty$,* b) $\overline{\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ r\in\Delta}}}\, m(r)=\infty$. *Dann gibt es in einer beliebig kleinen Umgebung von 0 eine Zahl $r^*\in\Delta$ derart, daß für jedes $r\in\Delta$ mit $r>r^*$ die Ungleichung $2m(r^*)>m(r)$ gilt.*

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch, also, daß es in einer Umgebung $(0,\delta)$ von 0 kein Punkt r^* mit den gewünschten Eigenschaften existiert. Nach den Bedingungen a) und b) existiert aber in dieser Umgebung ein $r_1\in\Delta$ mit $m(r_1)>\sup\limits_{r\geqq\delta} m(r)$. Da nach unserer Annahme r_1 nicht die Eigenschaft eines r^* haben kann, existiert ein Punkt $r_2>r_1$, $r_2\in\Delta$, für den $m(r_2)\geqq 2m(r_1)$ gilt. Dann ist $m(r_2)>2\sup\limits_{r\geqq\delta} m(r)$, folglich muß r_2 auch in $(0,\delta)$ liegen, also kann auch r_2 nicht die Eigenschaft eines r^* haben, d. h. existiert ein Punkt $r_3>r_2$, $r_3\in\Delta$, für den $m(r_3)\geqq 2m(r_2)\geqq 4m(r_1)$ gilt. r_3 liegt wieder in $(0,\delta)$. Nach diesem Verfahren bekommen wir eine unendliche Folge $r_1<r_2<r_3<\cdots$ von Punkten aus $\Delta\cap(0,\delta)$, für die $m(r_n)\geqq 2^{n-1}m(r_1)$ und folglich $\lim\limits_{n\to\infty} m(r_n)=\infty$ gilt. Das ist aber in Widerspruch zur Bedingung a). Damit ist der Beweis beendet.

Beweis von Satz 2. Es genügt offenbar nur eine solche gleichmäßig stetige Abbildung von A in M zu betrachten, die selbst nicht zu

$\mathrm{Lip}_u[A, M]$ gehört. Dann gibt es in A beliebig nahe liegende Punktpaare[13]) und folglich hat der Definitionsbereich Δ der Funktion

$$m(r) = \sup\left\{\frac{\varrho'(T(x_1), T(x_2))}{\varrho(x_1, x_2)} : x_1, x_2 \in A; \varrho(x_1, x_2) = r\right\}$$

den Punkt 0 als Häufungspunkt.

Die Funktion $m(r)$ erfüllt die Bedingungen a) und b) des Lemmas. Bezeichnen wir nämlich mit d den Durchmesser von M, so ist $m(r) \leqq \frac{d}{r}$, also $\sup\limits_{r \geqq s} m(r) \leqq \frac{d}{s} < \infty$. Andererseits folgt aus der Relation $T \notin \mathrm{Lip}_u[A, M]$, daß $\overline{\lim\limits_{\substack{r \in \Delta \\ r \to 0}}}\, m(r) = \infty$ ist.

Also können wir beliebig nahe zum Punkt 0 ein $r^* \in \Delta$ finden derart, daß für $r \geqq r^*, r \in \Delta$, die Ungleichung $2m(r^*) > m(r)$ gilt. Wir wählen r^* so klein, daß die Ungleichung $\varrho'(T(x_1), T(x_2)) \leqq \varepsilon$ für jedes, der Ungleichung $\varrho(x_1, x_2) \leqq r^*$ genügende Punktpaar x_1, x_2 gültig ist, wobei ε eine gegebene, beliebig kleine positive Zahl ist (das ist möglich wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von T).

Es sei N ein r^*-Netz im Raum A, d. h. eine Menge von Punkten von A mit der Eigenschaft, daß der Abstand von je zwei Punkten aus N nicht kleiner als r^* ist, und jeder Punkt $x \in A$ von mindestens einem Punkt von N einen Abstand kleiner als r^* hat. (Ein solches Netz existiert immer, vgl. z. B. HAUSDORFF [6].) Sei T_N die „Einschränkung" von T auf N, d. h. die Abbildung, die nur für die Punkte von N definiert ist und dort mit T zusammenfällt. T_N gehört zur Klasse $\mathrm{Lip}_u[N, M; 2m(r^*)]$: für $x, y \in N$ hat man ja $r = \varrho x, y) \geqq r^*$, also

$$\frac{\varrho'(T_N(x), T_N(y))}{\varrho(x, y)} = \frac{\varrho'(T(x), T(y))}{\varrho(x, y)} \leqq m(r) \leqq 2m(r^*).$$

Nach Satz 1 existiert eine Fortsetzung T' von T_N auf A mit

$$T' \in \mathrm{Lip}_u[A, M; 2m(r^*)].$$

Wir werden zeigen, daß die Ungleichung $\varrho'(T(x), T'(x)) \leqq 3\varepsilon$ für jeden Punkt $x \in A$ besteht. Zu jedem Punkt $x \in A$ können wir ja einen Punkt $x_N \in N$

---

13) Ist A so beschaffen, daß jedes Punktepaar $x, y \in A$ einen Abstand $\varrho(x, y) \geqq \varepsilon$ hat, wobei ε eine positive Konstante ist, so gilt für jede Abbildung T von A in M: $\varrho'(T(x) T(y)) \leqq \leqq \frac{d}{\varepsilon}\varrho(x, y)$, also ist $T \in \mathrm{Lip}_u\left[A, M; \frac{d}{\varepsilon}\right]$.

finden derart, daß $\varrho(x, x_N) < r^*$ ist. Dann gilt auch die Ungleichung

$$\varrho'(T(x_N), T'(x)) = \varrho'(T'(x_N), T'(x)) \leqq 2m(r^*)\varrho(x, x_N) \leqq$$

$$\leqq 2m(r^*)r^* = 2r^* \sup\left\{\frac{\varrho'(T(x_1), T(x_2))}{r^*}: \quad x_1, x_2 \in A; \varrho(x_1, x_2) = r^*\right\} =$$

$$= 2\sup\{\varrho'(T(x_1), T(x_2)): \quad x_1, x_2 \in A; \varrho(x_1, x_2) = r^*\} \leqq 2\varepsilon.$$

Hieraus und aus der Ungleichung $\varrho'(T(x), T(x_N)) \leqq \varepsilon$ folgt die gewünschte Ungleichung. Damit haben wir Satz 2 bewiesen.

In Satz 2 genügt es statt der Beschränktheit von M die Erfüllung der Relation $\sup\limits_{r \geqq s} m(r) < \infty$ für jedes $s > 0$, d.h. die Beschränktheit von $\dfrac{\varrho'(T(x_1), T(x_2))}{\varrho(x_1, x_2)}$ für $\varrho(x_1, x_2) \geqq s$ vorauszusetzen.

Diese Bedingung ist immer erfüllt, wenn T eine subadditive Stetigkeitsmajorante $\delta(r)$ besitzt. Aus $\lim\limits_{r \to 0} \delta(r) = 0$ folgt ja, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $r_\varepsilon > 0$ gibt, derart, daß für $r < r_\varepsilon$ die Ungleichung $\delta(r) \leqq \varepsilon$ besteht. Man kann jede Zahl $r \geqq r_\varepsilon$ in der Form $r = q r_\varepsilon + r'$ mit einer natürlichen Zahl q und mit $0 \leqq r' < r_\varepsilon$ darstellen; wegen der Subadditivität gilt dann $\delta(r) \leqq q\delta(r_\varepsilon) + \delta(r')$. Ist insbesondere r gleich dem Abstande zweier Punkte $x_1, x_2 \in A$, so bekommen wir die Ungleichung

$$\frac{\varrho'(T(x_1), T(x_2))}{\varrho(x_1, x_2)} \leqq \frac{\delta(r)}{r} \leqq \frac{q\delta(r_\varepsilon) + \delta(r')}{q r_\varepsilon + r'} \leqq$$

$$\leqq \frac{q\varepsilon + \varepsilon}{q r_\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{q r_\varepsilon} \leqq \frac{2\varepsilon}{r_\varepsilon}$$

für $\varrho(x_1, x_2) = r > r_\varepsilon$. Hieraus folgt die Behauptung.

Umgekehrt, wenn T sich durch eine zur Klasse $\mathrm{Lip}_u[A, M]$ gehörige Abbildung gleichmäßig approximieren läßt, dann besitzt T eine subadditive Stetigkeitsmajorante. In der Tat, ist T_ε eine zur Klasse $\mathrm{Lip}_u[A, M; K]$ gehörige Abbildung, die T mit der Genauigkeit ε approximiert, so ist

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\delta_T(r)}{r} = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{1}{r} \sup\{\varrho'(T(x_1), T(x_2)): \quad x_1, x_2 \in A; \varrho(x_1, x_2) \leqq r\} \leqq$$

$$\leqq \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{1}{r} \sup\{\varrho'(T_\varepsilon(x_1), T_\varepsilon(x_2)) + 2\varepsilon: \quad x_1, x_2 \in A; \varrho(x_1, x_2) \leqq r\} \leqq$$

$$\leqq \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{1}{r}(Kr + 2\varepsilon) = K.$$

Hieraus folgt (vgl. Fußnote 5), daß T eine subadditive Stetigkeitsmajorante hat. Also für nicht notwendig beschränkte hyperkonvexe metrische Räume gilt der folgende

Satz 2'. *Es sei T eine gleichmäßig stetige Abbildung eines metrischen Raumes A in einen hyperkonvexen metrischen Raum M. T ist dann und nur dann durch zur Klasse* $\mathrm{Lip}_u[A, M]$ *gehörige Abbildungen beliebig genau gleichmäßig approximierbar, wenn sie eine subadditive Stetigkeitsmajorante besitzt.*

Da aber, wie wir gesehen haben, T gewiß dann eine subadditive Stetigkeitsmajorante besitzt, wenn sie mindestens für ein einziges $\varepsilon > 0$ durch eine Abbildung $T^* \in \mathrm{Lip}_u[A, M]$ mit der Genauigkeit ε approximiert werden kann, so gilt der folgende

Satz 2''. *Es sei T wie in Satz 2'. Existiert eine Abbildung* $T^* \in \mathrm{Lip}_u[A, M]$ *mit* $\sup\limits_{x \in A} \varrho'(T(x), T^* x)) < \infty$, *so läßt sich T durch zur Klasse* $\mathrm{Lip}_u[A, M]$ *gehörige Abbildungen beliebig genau gleichmäßig approximieren.*

Beweis von Satz 3. Es sei $R \subset A$ die Menge derjenigen Punkte $x \in A$, in welchen T keine Lipschitz-Bedingung erfüllt, d. h. für die

$$\overline{\lim_{y \to x}} \frac{\varrho'(T(x), T(y))}{\varrho(x, y)} = \infty$$

ist (ist R leer, so ist nichts zu beweisen). Die Komplementärmenge $A - R$ bezeichnen wir mit S.

Es sei x ein beliebiger, aber fester Punkt von R. Der Definitionsbereich Δ der Funktion

$$m_x(r) = \sup_{\varrho(x, y) = r} \frac{\varrho'(T(x), T(y))}{\varrho(x, y)}$$

hat den Punkt 0 als Häufungspunkt,[14]) $m_x(r)$ ist nichtnegativ und erfüllt die Bedingungen a) und b) des Lemmas; es gilt ja für jede Zahl $s > 0$

$$\sup_{r \geqq s} m_x(r) = \sup_{\varrho(x, y) \geqq s} \frac{\varrho'(T(x), T(y))}{\varrho(x, y)} \leqq \frac{d}{s} < \infty$$

und

$$\overline{\lim_{r \to 0}} \, m(r) = \overline{\lim_{y \to x}} \frac{\varrho'(T(x), T(y))}{\varrho(x, y)} = \infty .$$

Nach dem Lemma können wir beliebig nahe zu 0 einen Punkt $r^* \in \Delta$ finden, derart, daß für $r \geqq r^*$ die Ungleichung $2 m_x(r^*) > m_x(r)$ gilt. Daraus folgt, daß wir beliebig nahe zum Punkt x einen Punkt x^* derart finden

[14]) Der Beweis ist ähnlich zum Beweis, der in Fußnote 13 angegeben wurde.

können, daß für jeden Punkt $y \in A$ mit $\varrho(x,y) \geqq \varrho(x,x^*)$ die Ungleichung

$$\text{(V)} \qquad 2\frac{\varrho'(T(x),T(x^*))}{\varrho(x,x^*)} < \frac{\varrho'(T(x),T(y))}{\varrho(x,y)}$$

besteht. Wegen der Stetigkeit können wir zu jedem Punkt $x \in A$ und jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\vartheta = \vartheta(x,\varepsilon)$ mit $0 < \vartheta < 1$ finden derart, daß für jeden Punkt $y \in A$ mit $\varrho(x,y) \leqq 2\vartheta$ die Ungleichung $\varrho'(T(x),T(y)) \leqq \varepsilon$ besteht. Wir ordnen jedem Punkt $x \in R$ einen Punkt x^* zu, der die Bedingung (V) und die Ungleichung $\varrho(x,x^*) < \vartheta$ erfüllt.

Wir bezeichnen mit $R_n (n = 1, 2, \ldots)$ die Menge derjenigen Punkte x von R, die die Bedingung $\frac{1}{n+1} \leqq \varrho(x,x^*) < \frac{1}{n}$ erfüllen. Offenbar sind die Mengen R_n paarweise fremd und ihre Vereinigungsmenge ist gleich R.

Wir konstruieren in der Menge R_1 ein 1-Netz und bezeichnen wir es mit N_1. Um jeden Punkt von N_1 als Mittelpunkt nehmen wir die offene Kugel vom Radius 1, die Vereinigungsmenge dieser Kugeln ist eine offene Menge G_1, die die Menge R_1 offenbar enthält: $G_1 \supset R_1$. In der Menge $R_2 - G_1$ konstruieren wir ein $\frac{1}{2}$-Netz N_2 und um jeden Punkt von N_2 schreiben wir eine offene Kugel vom Radius $\frac{1}{2}$; die Vereinigungsmenge G_2 dieser Kugeln ist wieder eine offene Menge und man hat $G_1 \cup G_2 \supset R_1 \cup R_2$. Dieses Verfahren fortgesetzt, am n-ten Schritte konstruiert man ein $\frac{1}{n}$-Netz N_n in $R_n - \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} G_i$, und man bezeichnet mit G_n die Vereinigungsmenge der offenen Kugeln vom Radius $\frac{1}{n}$ um die Punkte von N_n.

Man setze $N = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$ und $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$; G ist offen und $G \supset R$, also ist $A - G$ abgeschlossen und man hat $A - G = S - G \subset S$. Wir wollen beweisen, daß auch $N \cup (A - G)$ (in A) abgeschlossen ist. Dazu müssen wir zeigen, daß die Komplementärmenge von $N \cup (A - G)$ d. h. $G - N$ offen ist.

Es sei x ein beliebiger Punkt von $G - N$. Es gibt eine wohlbestimmte natürliche Zahl m, für welche $x \in G_m$. Das Netz N_m besitzt einen Punkt x_m mit $\varrho(x,x_m) < \frac{1}{m}$. Dies bedeutet, daß x in $G^\circ\left(x_m; \frac{1}{m}\right)$ liegt. In $G^\circ\left(x_m; \frac{1}{m}\right)$ liegt dann auch eine Umgebung von positivem Radius von x. Wählen wir diese Umgebung von x genügend klein, so enthält sie keinen Punkt von N und der abgeschlossenen Menge $A - G$, also ist sie dann in $G - N$ enthalten. Damit haben wir bewiesen, daß jeder Punkt von $G - N$ eine ganze Umgebung in $G - N$ besitzt, d. h. $G - N$ ist offen.

Sei T_{N^*} die Einschränkung von T auf die Menge $N^* = N \cup (A-G)$; wir behaupten, daß T_{N^*} zur Klasse $\mathrm{Lip}\,[N^*, M; k]$ gehört, mit

$$k(x) = \begin{cases} 2\,\dfrac{\varrho'(T(x), T(x^*))}{\varrho(x, x^*)} & (x \in N), \\ \sup\limits_{y \in A} \dfrac{\varrho'(T(x), T(y))}{\varrho(x, y)} & (x \in A-G). \end{cases}$$

(Das in der Definition von $k(x)$ vorkommende „Supremum" ist endlich, da T in jedem Punkte $x \in A-G \subset S$ eine Lipschitz-Bedingung erfüllt. Da N und $A-G$ fremd sind, ist die Definition von $k(x)$ eindeutig.) Für einen Punkt $x \in N$ folgt die Behauptung folgendermaßen. x ist in irgendeiner Menge N_n enthalten. Jeder von x verschiedene Punkt y von N^* hat dann von x einen Abstand $\varrho(x, y) \geqq \frac{1}{n}$, also ist a fortiori $\varrho(x, y) \geqq \varrho(x, x^*)$ und

$$\frac{\varrho'(T_{N^*}(x), T_{N^*}(y))}{\varrho(x, y)} = \frac{\varrho(T(x), T(y))}{\varrho(x, y)} \leqq 2\,\frac{\varrho'(T(x), T(x^*))}{\varrho(x, x^*)},$$

d. h. $$\varrho(T_{N^*}(x), T_{N^*}(y)) \leqq k(x)\,\varrho(x, y) \quad (x \in N, y \in N^*).$$

Für $x \in A-G$ ist die Behauptung trivial. Damit haben wir die Behauptung $T_{N^*} \in \mathrm{Lip}\,[N^*, M; k]$ bewiesen.

Nach Satz 1 besitzt T_{N^*} eine Fortsetzung $T' \in \mathrm{Lip}\,[A, M; k_A]$ mit einer Funktion $k_A(x)$, die für $x \in N^*$ mit $k(x)$ übereinstimmt.

Wir zeigen, daß die Ungleichung $\varrho'(T(x), T'(x)) \leqq 5\varepsilon$ für jeden Punkt $x \in A$ besteht. Für $x \in N^*$ ist ja sogar $T'(x) = T_{N^*}(x) = T(x)$. Ist aber $x \in A - N^* = G - N \subset G$, so existiert eine natürliche Zahl n mit $x \in G_n$, also besitzt N_n einen Punkt x_n mit $\varrho(x_n, x) < \frac{1}{n} \leqq 2\,\varrho(x_n, x_n^*)$. Hieraus und aus der Ungleichung $\varrho(x_n, x_n^*) < \vartheta(x_n, \varepsilon)$ folgt

$$\varrho'(T(x_n), T'(x)) = \varrho'(T'(x_n), T'(x)) \leqq k_A(x_n)\,\varrho(x_n, x) \leqq$$
$$\leqq 2\,\frac{\varrho'(T(x_n), T(x_n^*))}{\varrho(x_n, x_n^*)}\, 2\,\varrho(x_n, x_n^*) \leqq 4\,\varrho'(T(x_n), T(x_n^*)) \leqq 4\,\varepsilon.$$

Anderseits folgt aus $\varrho(x, x_n) < 2\,\vartheta(x_n, \varepsilon)$, daß $\varrho'(T(x), T(x_n)) \leqq \varepsilon$ gilt. Diese zwei Ungleichungen liefern die gewünschte Ungleichung. Also ist T durch ein $T' \in \mathrm{Lip}\,[A, M]$ beliebig genau gleichmäßig approximierbar, w. z. b. w.

Die Sätze 2, 2' und 3 gelten insbesondere für Abbildungen von A in einen beschränkten Teil der reellen Zahlengerade, d. h. für beschränkte reellwertige Funktionen. Hier kann die Bedingung der Beschränktheit sogar weggelassen werden: die Sätze gelten für Abbildungen von A in die Zahlengerade, oder allgemeiner in einen beliebigen endlichdimensionalen linearen normierten Raum. Wir behaupten also die folgenden beiden Sätze:

Satz 4. *Es sei A ein beliebiger metrischer Raum und B ein endlichdimensionaler linearer normierter Raum. Eine gleichmäßig stetige Abbildung T von A in B läßt sich dann und nur dann durch zur Klasse* $\mathrm{Lip}_u[A, B]$ *gehörige Abbildungen beliebig genau gleichmäßig approximieren, wenn T eine subadditive Stetigkeitsmajorante $\delta(\varepsilon)$ besitzt.*

Satz 5. *Es seien A und B wie in Satz 4. Eine beschränkte stetige Abbildung T von A in B läßt sich durch zur Klasse* $\mathrm{Lip}[A, B]$ *gehörige Abbildungen beliebig genau gleichmäßig approximieren.*

Beweis von Satz 4. Wenn T sich durch eine zur Klasse $\mathrm{Lip}_u[A, B]$ gehörige Abbildung gleichmäßig approximieren läßt, dann besitzt T eine subadditive Stetigkeitsmajorante. Der Beweis ist derselbe wie in Satz 2'.

Umgekehrt, besitzt T eine subadditive Stetigkeitsmajorante $\delta(\varepsilon)$, so folgt aus (IV) ($e_1, e_2, \ldots, e_n$; $T_1, T_2, \ldots, T_n$; μ, m sind wie im Beweis von Satz 1') die Ungleichung

$$|T_i(x_1) - T_i(x_2)| \leqq m\|T(x_1) - T(x_2)\| \leqq m\,\delta(\varepsilon) \qquad (\varrho(x_1, x_2) \leqq \varepsilon)$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$; d. h. die reellwertigen Funktionen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ besitzen ebenfalls eine subadditive Stetigkeitsmajorante, und zwar $m\,\delta(\varepsilon)$. Also nach Satz 2' kann jede Funktion T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ durch eine konvergente Folge $\{T_i^{(k)}\}$ von Funktionen aus $\mathrm{Lip}_u[A, R]$ beliebig genau gleichmäßig approximiert werden (R ist die reelle Zahlengerade). Dann konvergiert aber die Folge $\{T^{(k)}(x)\} = \{T_1^{(k)}(x)e_1 + T_2^{(k)}(x)e_2 + \cdots + T_n^{(k)}(x)e_n\}$ gleichmäßig gegen T. Da $T^{(k)} \in \mathrm{Lip}_u[A, B]$ $(k = 1, 2, \ldots)$, so haben wir den Satz bewiesen.

Beweis von Satz 5. Nach Satz 3 läßt sich jede Funktion T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ durch Funktionen aus $\mathrm{Lip}[A, R]$ beliebig genau gleichmäßig approximieren. Jede gleichmäßig konvergente Folge $\{T_i^{(k)}\} \to T_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ von Funktionen aus $\mathrm{Lip}[A, R]$ bestimmt eine gleichmäßig konvergente Folge $\{T^{(k)}\} \to T$ von Abbildungen aus $\mathrm{Lip}[A, B]$, w. z. b. w.

§ 3. Stetige Fortsetzung von stetigen Abbildungen

D sei eine abgeschlossene Untermenge des metrischen Raumes E, und T eine stetige Abbildung von D in einen beschränkten hyperkonvexen metrischen Raum M. Nach Satz 3 läßt sich T durch Abbildungen aus $\mathrm{Lip}[D, M]$ beliebig genau gleichmäßig approximieren. Es sei $\{T_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ eine approximierende Folge aus $\mathrm{Lip}[D, M]$, mit $\varrho'(T(x), T_i(x)) \leqq \frac{1}{2^{i+1}}$ für jedes $x \in D$. Dann gilt auch $\varrho'(T_i(x), T_{i+1}(x)) \leqq \frac{1}{2^i}$ für $x \in D$ und $i = 1, 2, \ldots$.

Nach dem Korollar von Satz 1 besitzt T_1 eine Fortsetzung $T'_1 \in \mathrm{Lip}[E,M]$. Mit wiederholter Anwendung von Satz 1 bekommen wir der Reihe nach Fortsetzungen $T'_1, T'_2, \ldots$ von $T_1, T_2, \ldots$ mit $T'_i \in \mathrm{Lip}[E,M]$ und $\varrho'(T'_i(x), T'_{i+1}(x)) \leqq \leqq \frac{1}{2^i}$ $(x \in E;\ i=1,2,\ldots)$.

Wir behaupten, daß die Folge $\{T'_i\}$ im Raum E gleichmäßig gegen eine Abbildung T' konvergiert, die offenbar eine stetige Fortsetzung von T ist. Es sei nämlich x ein beliebiger Punkt von E, und wir nehmen die Kugeln $G\left(T'_i(x), \frac{1}{2^{i-1}}\right)$ $(i=1,2,\ldots)$. Wegen

$$\varrho'(T'_i(x), T'_{i+k}(x)) \leqq \varrho'(T'_i(x), T'_{i+1}(x)) + \varrho'(T'_{i+1}(x), T'_{i+2}(x)) + \cdots +$$
$$+ \varrho'(T'_{i+k-1}(x), T'_{i+k}(x)) \leqq \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{i+k-1}} < \frac{1}{2^{i-1}}$$

haben diese Kugeln mindestens einen gemeinsamen Punkt. Die Radien dieser Kugeln streben für $i \to \infty$ gegen 0, also haben die Kugeln nur einen einzigen gemeinsamen Punkt, den wir mit $t(x)$ bezeichnen. Die Abbildung T' von E in M, definiert durch

$$T'(x) = \begin{cases} T(x) & (x \in D) \\ t(x) & (x \in E - D), \end{cases}$$

ist dann gleichmäßiger Limes der Folge $\{T'_i\}$, und zwar ist $\varrho'(T'_i(x), T'(x)) \leqq \frac{1}{2^{i-1}}$ $(x \in E; i=1,2,\ldots)$. Also ist T' eine stetige Fortsetzung von T.

Ist M selbst nicht beschränkt und hyperkonvex, sondern das topologische Produkt endlichvieler beschränkter hyperkonvexer metrischer Räume, so braucht man nur die einzelnen „Koordinaten“ von T stetig fortzusetzen um eine stetige Fortsetzung von T zu gewinnen. Damit haben wir also den folgenden Satz bewiesen:

Satz 6. *D sei eine abgeschlossene Untermenge eines beliebigen metrischen Raumes E, und M ein Raum, der als topologisches Produkt endlichvieler beschränkter und hyperkonvexer metrischer Räume entsteht. Jede stetige Abbildung T von D in M läßt sich zu einer stetigen Abbildung von E in M fortsetzen*[15, 16]).

---

15) Ein spezieller Fall dieses Satzes ist der folgende: M ist ein endlichdimensionaler linearer metrischer Raum und T ist beschränkt. Die Fortsetzbarkeit der nicht beschränkten Abbildungen folgt aus der Tat, daß der Satz auch für nicht beschränkte reelle Funtionen gilt.

16) Ist T gleichmäßig stetig, so läßt sich sie auch durch Abbildungen aus $\mathrm{Lip}_\mu[D,M]$ beliebig genau gleichmäßig approximieren. Fortsetzen wir diese Abbildungen derart, daß die Fortsetzungen zur Klasse $\mathrm{Lip}_\mu[E,M]$ gehören, so wird auch T_E gleichmäßig stetig.

§ 4. Verallgemeinerungen

Die folgenden beiden Definitionen stammen von ARONSZAJN und PANITCHPAKDI.

Definition 3. *Ein metrischer Raum M heißt* $\mathfrak{m}$*-hyperkonvex, wobei* $\mathfrak{m}$ *eine Kardinalzahl ist, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für jedes System* $\{G(x_i; r_i)\}_{i\in I}$ *von weniger als* $\mathfrak{m}$ *Kugeln in* M *mit der Eigenschaft*

$$\varrho'(x_i, x_k) \leqq r_i + r_k \qquad (i, k \in I)$$

ist $\bigcup_{i\in I} G(x_i; r_i)$ *nicht leer.*

Offenbar ist jeder hyperkonvexe Raum a fortiori $\mathfrak{m}$-hyperkonvex für jedes $\mathfrak{m}$, und jeder $\mathfrak{m}$-hyperkonvexe Raum ist zugleich $\mathfrak{n}$-hyperkonvex für jedes $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$. Die $\mathfrak{m}$-Hyperkonvexität ist im Fall $\mathfrak{m} = 3$ mit der Konvexität indentisch.

Ein wichtiges Beispiel für einen metrischen Raum, der für eine gewiße Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{m}$-hyperkonvex, aber nicht hyperkonvex ist, ist der Raum C aller stetiger Funktionen im reellen Intervall $[0, 1]$ mit der Metrik $\varrho(f, g) = \sup_{0\leqq x\leqq 1} |f(x) - g(x)|$. Dieser Raum ist nämlich abzählbar-hyperkonvex, aber nicht hyperkonvex (vgl. [2]).

Definition 4. *Ein metrischer Raum heißt* $\mathfrak{m}$*-separabel, falls in ihm eine überall dichte Untermenge von einer Mächtigkeit kleiner als* $\mathfrak{m}$ *existiert.*

Ist ein metrischer Raum $\mathfrak{m}$-separabel und $\mathfrak{m}$-hyperkonvex, so ist er auch hyperkonvex (vgl. [2]).

ARONSZAJN und PANITCHPAKDI [2] haben den folgenden Satz bewiesen:

Es sei E ein $\mathfrak{m}$*-separabler metrischer Raum, D eine Untermenge von E, und M ein* $\mathfrak{m}$*-hyperkonvexer metrischer Raum. Jede Abbildung T von D in M mit subadditiver Stetigkeitsmajorante* $\delta(\varepsilon)$ *kann zu einer Abbildung von E in M mit derselben Stetigkeitsmajorante* $\delta(\varepsilon)$ *fortgesetzt werden.*

Ist dagegen der metrische Raum M nicht $\mathfrak{m}$*-hyperkonvex, so existiert ein* $\mathfrak{m}$*-separabler metrischer Raum E und eine Untermenge D von E, für die der Satz ungültig ist.*

Es gelten die folgenden Sätze:

Satz 7. *Es sei E ein beliebiger* $\mathfrak{m}$*-separabler metrischer Raum, D eine abgeschlossene Untermenge von E und M ein beschränkter und* $\mathfrak{m}$*-hyperkonvexer metrischer Raum. Dann läßt sich jede Abbildung* $T \in \mathrm{Lip}[D, M]$ *zu einer Abbildung* $T_E \in \mathrm{Lip}[E, M]$*, und jede stetige Abbildung von D in M zu einer stetigen Abbildung von E in M fortsetzen.*

Satz 8. *Es sei A ein* $\mathfrak{m}$*-separabler metrischer Raum und M ein beschränkter* $\mathfrak{m}$*-hyperkonvexer metrischer Raum. Jede gleichmäßig stetige bzw.*

stetige Abbildung T von A in M kann beliebig genau gleichmäßig durch Abbildungen aus $\mathrm{Lip}_u[A, M]$ *bzw.* $\mathrm{Lip}[A, M]$ *approximiert werden.*

Zum Beweis brauchen wir nur den Satz 1 entsprechend zu verallgemeinern; daraus folgen dann die Sätze 7 und 8 mit ähnlicher Schlußweise, wie die Sätze 2, 3 und 6 aus dem Satz 1. Bei der Verallgemeinerung des Satzes 1 werden wir aber davon absehen, die Lipschitz-Konstante unverändert beizubehalten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Werte der Lipschitz-Konstanten $k(x)$ und $k_E^*(x)$ (von T bzw. T_E^*)) natürliche Zahlen sind. Dann sind die Werte der Lipschitz-Konstante $\bar{k}(x)$ ebenfalls natürliche Zahlen (vgl. Satz 1). Mit der Lipschitz-Konstante $\bar{k}(x)$ ist der Beweis der folgende.

Wir betrachten nur den Fall, daß $\mathfrak{m}$ eine nicht abzählbare Kardinalzahl ist. (Denn ist $\mathfrak{m}$ höchstens abzählbar, so hat E nur endlich viele Punkte, also erfüllt jede auf E definierte Abbildung eine (gleichmäßige) Lipschitz-Bedingung. Also ist der Satz in diesem Fall trivial.)

Wir nehmen an, daß wir die Fortsetzung von T schon auf jeder Menge $D_\xi = D \cup \{x_\nu\}_{\nu<\xi}$ mit $\xi < \eta$ konstruiert haben. Ist η eine Limeszahl, so können wir T_η ebenso wie in Satz 1 definieren.

Ist η keine Limeszahl, sondern von der Form $\eta = \xi + 1$, so verfahren wir zur Definition von T_η wie folgt. Wir bezeichnen mit $D_{\xi,n}(n = 1, 2, \ldots)$ denjenigen Teil von D_ξ, in dessen Punkten $\bar{k}(x)$ gleich n ist. Wir wählen in jedem $D_{\xi,n}(n = 1, 2, \ldots)$ je eine überall dichte Untermenge von Mächtigkeit kleiner als $\mathfrak{m}$. (Das ist ja möglich, weil E und so auch $D_{\xi,n}$ $\mathfrak{m}$-separabel ist.) Dann ist die Vereinigungsmenge X dieser Untermengen überall dicht in D_ξ, und hat ebenfalls eine Mächtigkeit kleiner als $\mathfrak{m}$. Wegen

$$\varrho'(T_\xi(x), T_\xi(y)) \leqq \bar{k}(x)\varrho(x, x_\xi) + \bar{k}(y)\varrho(y, x_\xi) \qquad (x, y \in X)$$

und

$$\varrho'(T_\xi(x)\, T_E^*(x_\xi)) \leqq \varepsilon + \bar{k}(x)\varrho(x, x_\xi) \qquad (x \in X)$$

besitzen die Kugeln $G(T_\xi(x); \bar{k}(x)\varrho(x, x_\xi))$ $(x \in X)$ und $G(T_E^*(x_\xi); \varepsilon)$ mindestens einen gemeinsamen Punkt, etwa den Punkt t_ξ.

Die Abbildung T_η von D_η in M, definiert durch

$$T_\eta(x) = \begin{cases} T_\xi(x) & (x \in D_\xi) \\ t_\xi & (x = x_\xi), \end{cases}$$

ist eine Fortsetzung von T_ξ, also auch von T, von der gewünschten Art. Man hat ja (vgl. (I), (II))

(VI) $$\varrho'(T_\eta(x), T_\eta(x_\xi)) \leqq \bar{k}(x)\varrho(x, x_\xi) \quad \text{für} \quad x \in X$$

und

$$\varrho'(T_\eta(x_\xi), T_E^*(x_\xi)) \leqq \varepsilon.$$

Wenn aber x ein beliebiger Punkt von D_ξ ist, der etwa in $D_{\xi,n}$ liegt, dann approximiere man den Punkt x durch Punkte aus der in $D_{\xi,n}$ überall dichten Menge: so gelangt man wieder zur Ungleichung (VI). Der übrige Teil des Beweises ist wie bei Satz 1.

Literaturverzeichnis

[1] H. Tietze, Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **145** (1915), 9—14.

[2] N. Aronszajn—P. Panitchpakdi, Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces, *Pacific Journal of Math.*, **6** (1956), 405—441.

[3] L. Nachbin, A theorem of Hahn-Banach type for linear transformations, *Transactions American Math. Soc.*, **88** (1950), 28—46.

[4] J. Czipszer—L. Gehér, Extension of functions satisfying a Lipschitz condition, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 213—221.

[5] F. Riesz—B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 3-ième édition (Budapest—Paris, 1955).

[6] M. H. Stone, The generalized Weierstrass approximation theorem, *Math. Mag.*, **21** (1948), 167—184, 237—254.

[7] F. Hausdorff, *Mengenlehre* (Berlin und Leipzig, 1935).

(Eingegangen am 30. Dezember 1958)